

Ispit iz Matematike 1, Hemija, januar 2013. GRUPA I

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$.
- 2.(10 poena) Ispitati konveksnost i naći prevojne tačke funkcije $f(x) = \arctg x - x$.
- 3.(10 poena) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}n^2}$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - y' - 6y = 7e^{5x}$.
- 5.(10 poena) Rešiti integral $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)^3 + 2\sqrt{x+1}}} dx$.
- 6.(10 poena) Neka slučajna promenljiva ima raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ p & 0.35 & 0.15 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

Odrediti p, a zatim izračunati E(X) i D(X).

Ispit iz Matematike 1, Hemija, januar 2013. GRUPA II

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x})$.
- 2.(10 poena) Ispitati konveksnost i naći prevojne tačke funkcije $f(x) = \arctg x^2$.
- 3.(10 poena) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n}}{n \log 2^{3n}}$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - y' - 6y = 2e^{4x}$.
- 5.(10 poena) Rešiti integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x(\sqrt[3]{x}+2)}}$.
- 6.(10 poena) Neka slučajna promenljiva ima raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 5 \\ 0.05 & 0.15 & p & 0.55 \end{pmatrix}.$$

Odrediti p, a zatim izračunati E(X) i D(X).

Rešenje:

1. grupa I

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \text{Lopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \text{Lopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

1. grupa II

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) = \text{Lopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) = \text{Lopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0.$$

2. grupa I

Funkcija $f(x) = \arctg x - x$ je definisana za svako realno x .

$$\text{Prvi izvod: } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

$$\text{Drugi izvod: } f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Funkcija je konveksna na $(-\infty, 0)$, a konkavna na $(0, \infty)$, pa je prevojna tačka $(0, 0)$.

2. grupa II

Funkcija $f(x) = \arctg x^2$ je definisana za svako realno x .

$$\text{Prvi izvod: } f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}.$$

$$\text{Drugi izvod: } f''(x) = \frac{2(1+x^4) - 2x(4x^3)}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

Funkcija je konveksna na $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$, a konkavna na $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty)$, pa je prevojna tačka $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \arctg \sqrt[4]{3})$.

3. grupa I

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}n^2}$$

Na osnovu Košijevog kriterijuma je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{3 \sqrt[3]{3} \sqrt[n]{n^2}} = \frac{4}{3} > 1$, pa red divergira.

3. grupa II

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n}}{n \log 2^{3n}}$ Na osnovu Košijevog kriterijuma je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-2}}{3 \sqrt[n]{n^2} \sqrt[3]{\log 2}} = \frac{1}{4} < 1$, pa red konvergira.

4. grupa I

Nadimo rešenje odgovarajuće homogene jednačine $y'' - y' - 6y = 0$. Rešenja karakteristične jednačine $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ su 3 i -2 pa je rešenje oblika:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Dalje se partikularno rešenje traži u obliku $y_p = A e^{5x}$, $y'_p = 5A e^{5x}$ i $y''_p = 25A e^{5x}$, pa iz $(25A - 5A - 6A)e^{5x} = 7e^{5x}$ dobijamo:

$$14A = 7, A = \frac{1}{2}$$

$$\text{Najzad: } y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{5x}.$$

4. grupa II

Nadimo rešenje odgovarajuće homogene jednačine $y'' - y' - 6y = 0$. Rešenja karakteristične jednačine $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ su 3 i -2 pa je rešenje oblika:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Dalje se partikularno rešenje traži u obliku $y_p = A e^{4x}$, $y'_p = 4A e^{4x}$ i $y''_p = 16A e^{4x}$, pa iz $(16A - 4A - 6A)e^{4x} = 2e^{4x}$ dobijamo:

$$6A = 2, A = \frac{1}{3}$$

$$\text{Najzad: } y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{4x}.$$

5. grupa I

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)^3 + 2\sqrt{x+1}}} dx = \{ \text{smena } t^2 = x+1, 2t dt = dx \} = \int \frac{t}{t^3+t} 2t dt = \int \frac{2t}{t^2+2} dt = \{ \text{smena } t^2 = z, 2t dt = dz \} = \int \frac{1}{z} dz = \ln |z| + C = \ln |t^2 + 2| + C = \ln |x + 3| + C.$$

5. grupa II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x+2})} = \{\text{smena } t^6 = x, 6t^5 dt = dx\} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+2)} = 6 \int \frac{t^2+2-2}{t^2+2} dt = 6t - 12 \int \frac{1}{t^2+2} dt = 6t - 6\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{2}} + C.$$

6. grupa I

$$p = 1 - 0,35 - 0,15 - 0,45 = 0,05; E(X) = -2 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,45 = 2;$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = (-2)^2 \cdot 0,05 + 0^2 \cdot 0,35 + 4^2 \cdot 0,15 + 4^2 \cdot 0,45 - 2^2 = 4$$

6. grupa II

$$p = 1 - 0,05 - 0,15 - 0,55 = 0,25; E(X) = -5 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,55 = 3;$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = (-5)^2 \cdot 0,05 + 0^2 \cdot 0,15 + 2^2 \cdot 0,25 + 5^2 \cdot 0,55 - 3^2 = 7$$